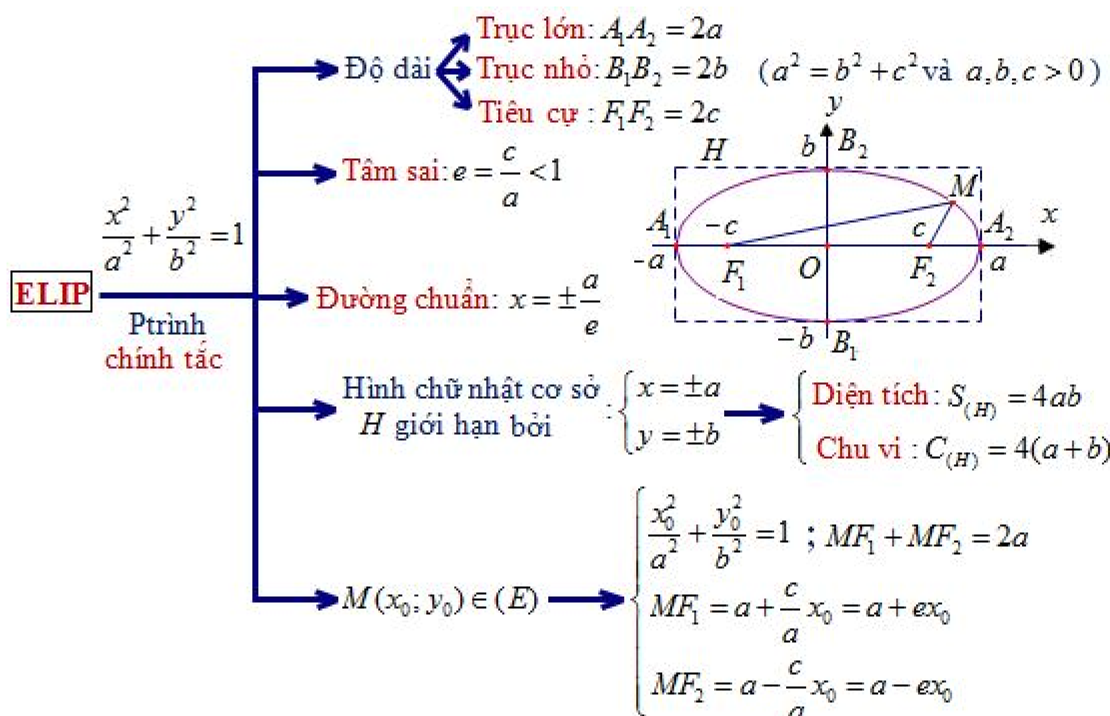
ELIP VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

GV: Nguyễn Thanh Tùng

I. KIẾN THỨC CƠ SỞ

Để giải quyết tốt các lớp bài toán liên quan tới Elip (tìm điểm và viết phương trình tắc của elip) trước tiên chúng ta cần nắm được các kiến thức cơ bản qua sơ đồ sau:



Dựa trên các kiến thức cơ bản này, kết hợp với các bài toán trước các bạn đã được tìm hiểu, sẽ giúp ta giải quyết dễ dàng các lớp bài toán liên quan tới elip. Cụ thể:

*+) Khi gặp bài toán "**Tìm điểm thuộc** (E) **thỏa mãn điều kiện (*) cho trước**" thì về cơ bản ta cần thiết lập được hai dấu "=" mà ở đó dữ kiện điểm thuộc (E) luôn cho ta được một dấu "=" đầu tiên. Các dữ kiện còn lại sẽ giúp ta tìm ra dấu "=" thứ hai. Nếu cần, trong một số bài toán ta có thể tham số hóa điểm thuộc (E) theo một ẩn. Ví như:* $M\in(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow M(a\sin t;b\cos t)$.

*+) Khi gặp bài toán "**Viết phương trình chính tắc của elip (E)**" cần cắt nghĩa chính xác dữ kiện của bài toán dựa trên các kiến thức cơ bản liên quan tới elip và tính đối xứng của elip (elip nhận hai trục tọa độ làm hai trục đối xứng và gốc tọa độ làm tâm đối xứng).*

II. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

Giải:

Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Ta có $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{5}}{3}a$ và $2.(2a+2b)=20\Leftrightarrow a+b=5\Leftrightarrow b=5-a$ (với $0<a<5$)

Khi đó ta có: $a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow a^2=(5-a)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}a\right)^2\Leftrightarrow a^2-18a+45=0\Leftrightarrow a=3$ hoặc $a=15$ (loại)

Với $a=3\Rightarrow b=2$. Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Tìm điểm M nằm trên elip sao cho $MF_1=4MF_2$, trong đó F_1,F_2 lần lượt là các tiêu điểm trái, phải của elip.

Giải:

Từ phương trình Elip (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=4\end{cases}\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=3\Rightarrow\begin{cases}F_1(-3;0)\\F_2(3;0)\end{cases}$

Cách 1: Gọi $M(x_0;y_0)$, suy ra $\begin{cases}MF_1=a+\frac{c}{a}x_0=5+\frac{3}{5}x_0\\MF_2=a-\frac{c}{a}x_0=5-\frac{3}{5}x_0\end{cases}$

Khi đó $MF_1=4MF_2\Leftrightarrow 5+\frac{3}{5}x_0=4\left(5-\frac{3}{5}x_0\right)\Leftrightarrow x_0=5$

Do đó $M(5;y_0)\in(E)\Rightarrow\frac{5^2}{25}+\frac{y_0^2}{16}=1\Leftrightarrow y_0=0$

Vậy $M(5;0)$

Cách 2:

$\left.\begin{matrix}M\in(E)\Leftrightarrow MF_1+MF_2=2a=10\\ \text{Mặt khác } MF_1=4MF_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow 5MF_2=10\Leftrightarrow MF_2=2\Leftrightarrow MF_2^2=4$

Gọi $M(x_0;y_0)$, khi đó $\begin{cases}M\in(E)\\MF_2^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{16}=1\\(x_0-3)^2+y_0^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{16}=1 & (1)\\y_0^2=-x_0^2+6x_0-5 & (2)\end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được : $\frac{x_0^2}{25}-\frac{x_0^2-6x_0+5}{16}=1\Leftrightarrow 3x_0^2-50x_0+175=0\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}x_0=5\Rightarrow y_0=0\\x_0=\frac{35}{3}\Rightarrow y_0^2=-\frac{640}{9}<0\end{matrix}\right.$.

Vậy $M(5;0)$

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E):\frac{x^2}{4}+y^2=1$ điểm $M\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M cắt E tại hai điểm A,B sao cho $MA=2MB$.

Giải:

+) Gọi $B(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow \dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1\Leftrightarrow x_0^2+4y_0^2-4=0$ (1)

+) Do M nằm trong (E) nên từ $MA=2MB$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow \begin{cases} x_A-\dfrac{2}{3}=-2\left(x_0-\dfrac{2}{3}\right)\\ y_A-\dfrac{2}{3}=-2\left(y_0-\dfrac{2}{3}\right)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x_A=2-2x_0\\ y_A=2-2y_0\end{cases}\Rightarrow A(2-2x_0;2-2y_0)$$

+) Mà $A\in(E)\Rightarrow \dfrac{(2-2x_0)^2}{4}+(2-2y_0)^2=1\Leftrightarrow x_0^2+4y_0^2-2x_0-8y_0+4=0$ (2)

+) Từ (1) và (2) ta được hệ: $\begin{cases} x_0^2+4y_0^2-4=0\\ x_0^2+4y_0^2-2x_0-8y_0+4=0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0;y_0=1\\ x_0=\dfrac{8}{5};y_0=\dfrac{3}{5}\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(0;1)\\ B\left(\dfrac{8}{5};\dfrac{3}{5}\right)\end{array}\right.$

Với $B(0;1)\Rightarrow \Delta: x+2y-2=0$; Với $B\left(\dfrac{8}{5};\dfrac{3}{5}\right)\Rightarrow \Delta: x+14y-10=0$

Vậy $x+2y-2=0$ hoặc $x+14y-10=0$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E):\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Đường thẳng $\Delta: x-\sqrt{2}y=0$ cắt (E) tại hai điểm B,C . Tìm tọa độ điểm A trên (E) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất

Giải:

+) Do $\Delta\cap(E)=\{B;C\}$ nên B,C cố định hay độ dài BC không đổi

Suy ra diện tích ABC lớn nhất khi khoảng cách $h=d(A,\Delta)$ lớn nhất

+) Phương trình tham số của (E) : $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\sin t\\ y=2\cos t\end{cases}$ nên gọi $A\left(2\sqrt{2}\sin t;2\cos t\right)$

Khi đó $h=d(A,\Delta)=\dfrac{\left|2\sqrt{2}\sin t-2\sqrt{2}\cos t\right|}{\sqrt{3}}=\dfrac{\left|2\sqrt{2}\left(\sin t-\cos t\right)\right|}{\sqrt{3}}=\dfrac{\left|4\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|}{\sqrt{3}}\le\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Dấu" =" xảy ra khi: $\left|\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)=1\\ \sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\\ t=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$

+) Với $t=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\Rightarrow A\left(2;-\sqrt{2}\right)$ +) Với $t=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\Rightarrow A\left(-2;\sqrt{2}\right)$

Vậy $A\left(2;-\sqrt{2}\right)$ hoặc $A\left(-2;\sqrt{2}\right)$.

Nhận xét : *Ngoài cách để* (E) *dưới dạng chính tắc* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *, trong nhiều bài toán các bạn có thể chuyển nó về dạng tham số sau :* $\begin{cases} x=a\sin t\\ y=b\cos t\end{cases}$ *để việc tham số hóa điểm thuộc elip được dễ dàng hơn.*

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$ và độ dài đường chéo hình chữ nhật cơ sở bằng $2\sqrt{5}$.

Giải:

+) Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$

Tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow c^2=\frac{a^2}{3}$.

Độ dài đường chéo hình chữ nhật $\sqrt{(2a)^2+(2b)^2}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow a^2+b^2=5\Leftrightarrow b^2=5-a^2$

+) Khi đó $a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow a^2=5-a^2+\frac{a^2}{3}\Leftrightarrow a^2=3\Rightarrow b^2=2$

Vậy trình chính tắc của elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ và $M(1;-1)$. Một đường thẳng d đi qua M cắt (E) tại A,B sao cho $MA.MB$ lớn nhất. Tìm tọa độ A,B .

Giải:

+) $M(1;-1)$ thuộc miền trong của (E) nên d luôn cắt (E) tại A,B

Gọi phương trình đường thẳng d có dạng: $\begin{cases}x=1+mt\\y=-1+nt\end{cases}$ với $t\in\mathbb{R}, m^2+n^2\neq 0$.

+) Gọi $A(1+mt_1;-1+nt_1), B(1+mt_2;-1+nt_2)$. Trong đó t_1,t_2 là nghiệm của phương trình:

$$\frac{(1+mt)^2}{8}+\frac{(-1+nt)^2}{4}=1\Leftrightarrow\left(m^2+2n^2\right)t^2+2(m-2n)t-5=0$$

Theo hệ thức Vi – et ta có: $t_1t_2=-\frac{5}{a^2+2b^2}$

+) Khi đó $MA.MB=\sqrt{(mt_1)^2+(nt_1)^2}.\sqrt{(mt_2)^2+(nt_2)^2}=\left(m^2+n^2\right)|t_1t_2|=\frac{5(m^2+n^2)}{m^2+2n^2}=\frac{5}{2-\frac{m^2}{m^2+n^2}}$

Mặt khác $0\le\frac{m^2}{m^2+n^2}\le 1$, do đó $MA.MB$ lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{m^2}{m^2+n^2}=1\Leftrightarrow n=0$

Khi đó đường thẳng d có dạng : $y=-1$, suy ra tọa độ giao điểm A,B của d và (E) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\\y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=6\\y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\sqrt{6}\\y=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A\left(\sqrt{6};-1\right)\\B\left(-\sqrt{6};-1\right)\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}A\left(-\sqrt{6};-1\right)\\B\left(\sqrt{6};-1\right)\end{cases}.$$

Vậy $\begin{cases}A\left(\sqrt{6};-1\right)\\B\left(-\sqrt{6};-1\right)\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}A\left(-\sqrt{6};-1\right)\\B\left(\sqrt{6};-1\right)\end{cases}$.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Lập phương trình chính tắc của elip trong mặt phẳng Oxy biết điểm $M\left(\sqrt{\frac{8}{3}};\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ thuộc elíp và tam giác F_1MF_2 vuông tại M, trong đó F_1,F_2 là hai tiêu điểm của elíp.

Giải:

+) Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$ và $a^2=b^2+c^2$

Khi đó $M\left(\sqrt{\frac{8}{3}};\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\in(E)\Leftrightarrow\frac{8}{3a^2}+\frac{1}{3b^2}=1\Leftrightarrow a^2+8b^2=3a^2b^2$ (1)

+) Với $F_1(-c;0),F_2(c;0)$, khi đó tam giác F_1MF_2 vuông tại M nên ta suy ra:

$$MF_1^2+MF_2^2=F_1F_2^2\Leftrightarrow\left(c+\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2+\frac{1}{3}+\left(c-\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2+\frac{1}{3}=4c^2\Leftrightarrow c^2=3\Rightarrow a^2=b^2+c^2=b^2+3 \quad (2)$$

+) Thay (2) vào (1) ta được: $b^2+3+8b^2=3\left(b^2+3\right)b^2\Leftrightarrow b^4=1\Leftrightarrow b^2=1\Rightarrow a^2=4$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng elip (E) có hai tiêu điểm F_1 và F_2 với $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$ và có một điểm M thuộc (E) sao cho tam giác F_1MF_2 vuông tại M và có diện tích bằng 1.

Giải:

+) Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$

Với $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$, suy ra $c=\sqrt{3}\Rightarrow a^2-b^2=c^2=3$ hay $a^2=b^2+3$ (1)

+) Gọi $M(x_0;y_0)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MF_1}=\left(-\sqrt{3}-x_0;-y_0\right)\\ \overrightarrow{MF_2}=\left(\sqrt{3}-x_0;-y_0\right)\end{cases}$

Khi đó $\widehat{F_1MF_2}=90^0\Leftrightarrow\overrightarrow{MF_1}.\overrightarrow{MF_2}=0\Leftrightarrow x_0^2-3+y_0^2=0\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2=3$

Ta có $S_{F_1MF_2}=\frac{1}{2}d(M,Ox).F_1F_2=\frac{1}{2}|y_0|.2\sqrt{3}=\sqrt{3}|y_0|=1\Leftrightarrow y_0^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x_0^2=\frac{8}{3}$

+) Mặt khác $M(x_0;y_0)\in(E)\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\frac{8}{3a^2}+\frac{1}{3b^2}=1$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được: $\frac{8}{3(b^2+3)}+\frac{1}{3b^2}=1\Leftrightarrow 3b^4=3\Leftrightarrow b=1$ (do $b>0$) $\Rightarrow a^2=4$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Viết phương trình chính tắc của elíp đi qua điểm $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và tiêu điểm của elip nhìn trục nhỏ với một góc 60^0.

Giải:

+) Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$

Gọi $F_1(-c;0)$ là tiêu điểm của (E) và $B_1(0;-b), B_2(0;b)$ là hai đỉnh thuộc trục nhỏ của (E)

+) Do $\Delta F_1B_1B_2$ cân tại F_1 và $\widehat{B_1F_1B_2}=60^0$, suy ra $\Delta F_1B_1B_2$ đều

Khi đó $F_1B_1=B_1B_2 \Leftrightarrow F_1B_1^2=B_1B_2^2 \Leftrightarrow c^2+b^2=(2b)^2 \Leftrightarrow c^2=3b^2 \Rightarrow a^2=b^2+c^2=4b^2$ (1)

+) Với $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\in(E)\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được : $\frac{1}{4b^2}+\frac{3}{4b^2}=1\Leftrightarrow b^2=1\Rightarrow a^2=4$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. Giả sử F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip, trong đó F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M trên (E) sao cho $MF_1-MF_2=2$.

Giải:

+) (E) có phương trình $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\Rightarrow\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\ b=2\\ c=\sqrt{a^2-b^2}=2\end{cases}$

+) Gọi $M(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\begin{cases}MF_1=a+\frac{cx_0}{a}=2\sqrt{2}+\frac{2x_0}{2\sqrt{2}}\\ MF_2=a-\frac{cx_0}{a}=2\sqrt{2}-\frac{2x_0}{2\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow MF_1-MF_2=\sqrt{2}x_0$

+) Khi đó $MF_1-MF_2=2\Leftrightarrow\sqrt{2}x_0=2\Leftrightarrow x_0=\sqrt{2}$

+) Với $x_0=\sqrt{2}\Rightarrow y_0^2=4\left(1-\frac{x_0^2}{8}\right)=4\left(1-\frac{2}{8}\right)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y_0=\sqrt{3}\\ y_0=-\sqrt{3}\end{array}\right.$

Vậy $M\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ hoặc $M\left(\sqrt{2};-\sqrt{3}\right)$.

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Tìm điểm M thuộc elip sao cho góc $\widehat{F_1MF_2}=90^0$ với F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip.

Giải:

+) Elip (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\Rightarrow\begin{cases}a=5;\quad b=3\\ c=\sqrt{a^2-b^2}=4\end{cases}$

+) Gọi $M(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\begin{cases}MF_1=a+\dfrac{c}{a}x_0=5+\dfrac{4}{5}x_0;\quad MF_2=a-\dfrac{c}{a}x_0=5-\dfrac{4}{5}x_0\\ \dfrac{x_0^2}{25}+\dfrac{y_0^2}{9}=1\quad(*)\end{cases}$ với $x_0>0$

Do $\widehat{F_1MF_2}=90^0$ nên suy ra : $MF_1^2+MF_2^2=F_1F_2^2\Leftrightarrow\left(5+\dfrac{4}{5}x_0\right)^2+\left(5-\dfrac{4}{5}x_0\right)^2=64\Leftrightarrow 8x_0^2=175\Leftrightarrow x_0=\pm\dfrac{5\sqrt{14}}{4}$

+) Thay $x_0=\pm\dfrac{5\sqrt{14}}{4}$ vào (*) ta được: $\dfrac{7}{8}+\dfrac{y_0^2}{9}=1\Leftrightarrow y_0^2=\dfrac{9}{8}\Leftrightarrow y_0=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

Vậy $M\left(\dfrac{5\sqrt{14}}{4};\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)$, $M\left(\dfrac{5\sqrt{14}}{4};-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)$, $M\left(-\dfrac{5\sqrt{14}}{4};\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)$, $M\left(-\dfrac{5\sqrt{14}}{4};-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)$.

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Viết phương trình chính tắc của elip, biết hai tiêu điểm cùng với hai đỉnh trên trục bé xác định một hình vuông và phương trình hai đường chuẩn là $x=\pm8$.

Giải:

+) Ta có hai tiêu điểm $F_1(-c;0),F_2(c;0)$ và hai đỉnh $B_1(0;-b),B_2(0;b)$ thuộc trục nhỏ xác định một hình vuông nên ta có $b=c$. Elip có phương trình đường chuẩn $x=\pm\dfrac{a}{e}=\pm\dfrac{a^2}{c}\Rightarrow\dfrac{a^2}{c}=8\Leftrightarrow a^2=8c$

+) Khi đó: $a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow 8c=c^2+c^2\Leftrightarrow c=4>0\Rightarrow\begin{cases}a^2=32\\ b=4\end{cases}$

+) Suy ra phương trình chính tắc của elip là: $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm F_1,F_2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 bằng $\dfrac{4}{3}$.

Giải:

+) Từ $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1\Rightarrow\begin{cases}a=5\\ b=3\\ c=\sqrt{a^2-b^2}=4\end{cases}\Rightarrow p_{MF_1F_2}=\dfrac{MF_1+MF_2+F_1F_2}{2}=\dfrac{2a+2c}{2}=a+c=9$

+) Suy ra diện tích tam giác MF_1F_2 là: $S_{MF_1F_2}=pr=9.\dfrac{4}{3}=12$

+) Mặt khác ta có: $S_{MF_1F_2}=\dfrac{1}{2}.d(M,Ox).F_1F_2=\dfrac{1}{2}.|y_M|.2c=4|y_M|\Rightarrow|y_M|=\dfrac{S_{MF_1F_2}}{4}=\dfrac{12}{4}=3$

+) Vì $M(x_M;y_M)\in(E)\Rightarrow\dfrac{x_M^2}{25}+\dfrac{9}{9}=1\Leftrightarrow x_M=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(0;3)\\ M(0;-3)\end{array}\right.$

Vậy $M(0;3)$ hoặc $M(0;-3)$.

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng khi điểm M thay đổi trên (E) thì độ dài nhỏ nhất của OM bằng 4 và độ dài lớn nhất của MF_1 bằng 8, với F_1 là tiêu điểm có

hoành độ âm.

Giải:

+) Gọi phương trình chính tắc của elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\begin{cases}-a\le x_0\le a\\ MF_1=a+\frac{cx_0}{a}\end{cases}\Rightarrow a-c\le MF_1\le a+c$

Suy ra độ dài MF_1 lớn nhất bằng : $a+c=8$ (1)

+) Lại có: $M(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\begin{cases}a>b\Rightarrow\frac{x_0^2}{a^2}\le\frac{x_0^2}{b^2}\\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow 1=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\le\frac{x_0^2}{b^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{x_0^2+y_0^2}{b^2}=\frac{OM^2}{b^2}\Rightarrow OM\ge b$

Suy ra độ dài nhỏ nhất của OM bằng $b=4$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $\begin{cases}a+c=8\\ b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+\sqrt{a^2-16}=8\\ b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\ b=4\end{cases}$

Vậy phương trình elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E):\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. Viết phương trình đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm phân biệt có tọa độ là các số nguyên.

Giải:

Gọi $M(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\frac{x_0^2}{8}+\frac{y_0^2}{2}=1$ (*) $\Rightarrow y_0^2\le 2\Rightarrow y_0\in\{-1;0;1\}$ (vì $y_0\in\mathbb{Z}$)

+) Với $y_0=\pm1$ thay vào (*) ta được: $x_0=\pm2$ (thỏa mãn)

+) Với $y_0=0$ thay vào (*) ta được: $x_0=\pm2\sqrt{2}$ (loại)

Suy ra 4 điểm có tọa độ nguyên trên (E) là: $M_1(2;1),M_2(2;-1),M_3(-2;1),M_4(-2;-1)$

Khi đó ta sẽ lập được 6 phương trình đường thẳng d thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$x=2;x=-2;y=1;y=-1;x-2y=0;x+2y=0$.

Nhận xét: *Ở ví dụ trên nếu ta tiếp cận theo cách thông thường là giả sử dạng phương trình của d rồi tìm giao điểm, sau đó sử dụng điều kiện tọa độ nguyên thì chúng ta sẽ gặp khó khăn. Song nếu ta làm theo chiều nghịch thì bài toán sẽ trở nên "nhẹ nhàng" hơn rất nhiều. Bởi ở những bài toán liên quan tới elip (hay cả đường tròn) ta hoàn toàn có thể chặn điều kiện cho x,y khá đơn giản. Vì vậy việc yêu cầu tọa độ nguyên của bài toán, giúp ta nghĩ tới ngay giải pháp trên.*

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E):\frac{x^2}{9}+y^2=1$. Tìm tọa độ điểm M trên (E) sao cho bán kính qua tiêu của tiêu điểm này bằng 3 lần bán kính qua tiêu của tiêu điểm kia.

Giải:

+) Từ $(E): \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

+) Gọi $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = a + ex_0 \\ MF_2 = a - ex_0 \end{cases}$

Từ giả thiết ta có: $\left[\begin{array}{l} MF_1 = 3MF_2 \\ MF_2 = 3MF_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} MF_1 - 3MF_2 = 0 \\ MF_2 - 3MF_1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(MF_1 - 3MF_2\right)\left(MF_2 - 3MF_1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 10MF_1.MF_2 - 3\left(MF_1^2 + MF_2^2\right) = 0 \Leftrightarrow 16MF_1.MF_2 - 3\left(MF_1 + MF_2\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16\left(a + ex_0\right).\left(a - ex_0\right) - 3.\left(2a\right)^2 = 0 \Leftrightarrow 16(a^2 - e^2x_0^2) - 12a^2$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 = \frac{a^2}{4e^2} = \frac{3^2}{4.\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{81}{32} \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{9\sqrt{2}}{8}$$

+) Mặt khác $M \in (E) \Rightarrow y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{9} = \frac{23}{32} \Leftrightarrow y_0 = \pm\frac{\sqrt{46}}{8}$

Vậy $M\left(\frac{9\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{46}}{8}\right)$ hoặc $M\left(\frac{9\sqrt{2}}{8}; -\frac{\sqrt{46}}{8}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{9\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{46}}{8}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{9\sqrt{2}}{8}; -\frac{\sqrt{46}}{8}\right)$

Nhận xét: *Trong giải toán ta biết* $A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$*, và ta thường chỉ quen với chiều biến đổi thuận. Nhưng trong nhiều trường hợp, việc biến đổi theo chiều ngược lại sẽ giúp giải bài toán ngắn gọn hơn rất nhiều, mà ví dụ trên là một điển hình.*

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M\left(-\sqrt{3};1\right)$, đường elip (E) đi qua điểm M và khoảng cách giữa hai đường chuẩn của (E) là 6. Lập phương trình chính tắc của (E).

Giải:

+) Gọi phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$

+) Elip (E) có hai phương trình đường chuẩn là $x = \frac{a}{e}$ và $x = -\frac{a}{e}$

Do đó khoảng cách giữa hai đường chuẩn là:

$$2\frac{a}{e} = \frac{2a^2}{c} = 6 \Leftrightarrow a^2 = 3c \Leftrightarrow a^4 = 9c^2 = 9(a^2 - b^2) \Leftrightarrow b^2 = \frac{9a^2 - a^4}{9} \quad (1)$$

+) Mặt khác $M\left(-\sqrt{3};1\right) \in (E) \Rightarrow \frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ (2)

Thay (1) vào (2) và rút gọn ta được: $a^4 - 12a^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 6 \Rightarrow b^2 = 2$

Vậy phương trình (E) cần lập là: $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng có một đỉnh và hai tiêu điểm của (E) tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của (E) là $12\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Giải:

+) Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$

Ta có chu vi hình chữ nhật cơ sở: $4(a+b)=12\left(2+\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow a+b=3\left(2+\sqrt{3}\right)$ (1)

+) Không mất tính tổng quát giả sử đỉnh $B(0;b)$ và hai tiêu điểm $F_1(-c;0),F_2(c;0)$ tạo thành tam giác đều

Do ΔBF_1F_2 luôn cân tại B, nên ΔBF_1F_2 đều khi $BF_1=F_1F_2\Leftrightarrow BF_1^2=F_1F_2^2\Leftrightarrow c^2+b^2=4c^2\Leftrightarrow c^2=\frac{b^2}{3}$

+) Khi đó $a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow a^2=\frac{4}{3}b^2\Leftrightarrow a=\frac{2\sqrt{3}}{3}b$ (2) (do $a,b>0$)

Thay (2) vào (1) ta được : $\frac{2\sqrt{3}}{3}b+b=3\left(2+\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow\sqrt{3}b\left(2+\sqrt{3}\right)=9\left(2+\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow b=3\sqrt{3}\Rightarrow a=6$

+) Vậy phương trình chính tắc của elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

Bài 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E) có hai tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};0\right),F_2\left(\sqrt{3};0\right)$ và đi qua điểm $A\left(\sqrt{3};\frac{1}{2}\right)$. Lập phương trình chính tắc của (E) và với mọi điểm M thuộc (E), hãy tính giá trị biểu thức $P=MF_1^2+MF_2^2-3OM^2-MF_1.MF_2$

Giải:

+) Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$

(E) có hai tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};0\right),F_2\left(\sqrt{3};0\right)$, suy ra $c=\sqrt{3}$

+) Khi đó $a^2-b^2=c^2=3\Leftrightarrow a^2=b^2+3\Rightarrow(E):\frac{x^2}{b^2+3}+\frac{y^2}{b^2}=1$

+) Với $A\left(\sqrt{3};\frac{1}{2}\right)\in(E)\Leftrightarrow\frac{3}{b^2+3}+\frac{1}{4b^2}=1\Leftrightarrow 4b^4-b^2-3=0\Leftrightarrow(4b^2+3)(b^2-1)=0\Leftrightarrow b^2=1\Rightarrow a^2=4$

Vậy phương trình chính tắc của (E) là : $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

+) Gọi $M(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\begin{cases}MF_1=a+\frac{c}{a}x_0;\quad MF_2=a-\frac{c}{a}x_0\\ OM^2=x_0^2+y_0^2;\quad\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1\end{cases}$

Khi đó $P=\left(a+\frac{c}{a}x_0\right)^2+\left(a-\frac{c}{a}x_0\right)^2-3\left(x_0^2+y_0^2\right)-\left(a+\frac{c}{a}x_0\right)\left(a-\frac{c}{a}x_0\right)$

$$= a^2 + \frac{3c^2}{a^2}x_0^2 - 3\left(x_0^2 + y_0^2\right) = 4 + \frac{9}{4}x_0^2 - 3\left(x_0^2 + y_0^2\right) = 4 - 3\left(\frac{x_0^2}{4} + y_0^2\right) = 4 - 3 = 1$$

Vậy $P = 1$.

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2 (hoành độ của F_1 âm). Tìm tọa độ điểm M thuộc elip sao cho $\widehat{MF_1F_2} = 60^0$

Giải:

+) (E) có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$, suy ra $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2 \Rightarrow \begin{cases} F_1(-2;0) \\ F_2(2;0) \end{cases}$

+) $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = a + \frac{c}{a}x_0 = 3 + \frac{2}{3}x_0; \quad MF_2 = a - \frac{c}{a}x_0 = 3 - \frac{2}{3}x_0 \\ \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{5} = 1 \quad (*) \end{cases}$

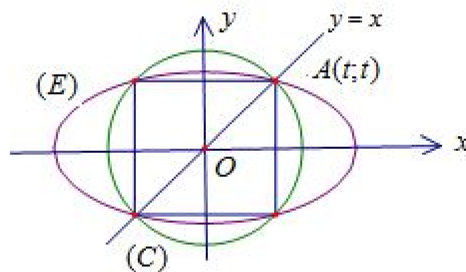
Ta có $MF_2^2 = MF_1^2 + F_1F_2^2 - 2MF_1.F_1F_2.\cos\widehat{MF_1F_2}$

$$\Leftrightarrow \left(3 - \frac{2}{3}x_0\right)^2 = \left(3 + \frac{2}{3}x_0\right)^2 + 4^2 - 2.\left(3 + \frac{2}{3}x_0\right).4.\cos 60^0 \Leftrightarrow 4x_0 = -3 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{3}{4}$$

+) Thay $x_0 = -\frac{3}{4}$ vào (*) ta được: $y_0^2 = \frac{75}{16} \Leftrightarrow y_0 = \pm\frac{5\sqrt{5}}{4}$. Vậy $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{5\sqrt{5}}{4}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{3}{4}; -\frac{5\sqrt{5}}{4}\right)$.

Bài 17 (A – 2012). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$. Viết phương trình chính tắc elip (E), biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.

Giải:



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

+) (E) có độ dài trục lớn bằng $8 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

+) (E) cắt (C) tại bốn điểm phân biệt tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông nên 4 đỉnh nằm trên hai đường phân giác thuộc góc phần tư thứ nhất và thứ hai .

Ta giả sử A là một giao điểm của (E) và (C) thuộc đường phân giác $\Delta: y = x$.

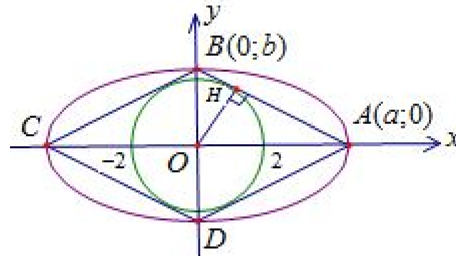
+) Gọi $A(t;t) \in \Delta$ ($t > 0$). Ta có: $A \in (C) \Rightarrow t^2 + t^2 = 8 \Leftrightarrow t = 2$ (vì $t > 0$) $\Rightarrow A(2;2)$

+) Mà $A \in (E) \Rightarrow \frac{2^2}{4^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{16}{3}$.

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$

Bài 18 (B – 2012). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có $AC=2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2+y^2=4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh A,B,C,D của hình thoi. Biết A thuộc trục Ox.

Giải:



Gọi phương trình chính tắc của elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (với $a>b>0$)

Vì (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D và $A\in Ox$ nên không mất tính tổng quát giả sử: $A(a;0)$ và $B(0;b)$.

Mà hình thoi $ABCD$ có $AC = 2BD$ $\Leftrightarrow 2OA=4OB \Leftrightarrow OA=2OB$

$\Leftrightarrow a=2b$ (vì $a>b>0$) hay $A(2b;0)$ và $B(0;b)$

Gọi H là hình chiếu của O lên AB

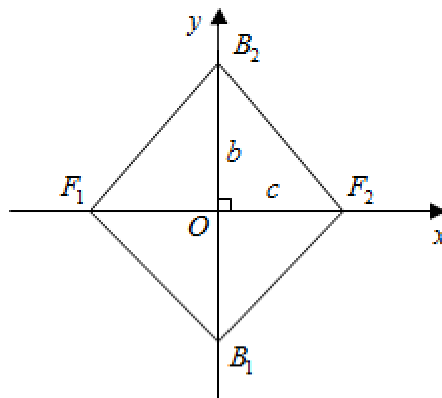
$\Rightarrow OH=R=2$ (vì đường tròn $x^2+y^2=4$ tiếp xúc với các cạnh của hình thoi)

Xét tam giác OAB ta có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ hay $\frac{1}{4}=\frac{1}{4b^2}+\frac{1}{b^2}\Leftrightarrow b^2=5\Rightarrow a^2=4b^2=20$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$

Bài 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Lập phương trình chính tắc của elip (E) có tâm sai bằng $\frac{3}{5}$, biết diện tích của tứ giác tạo bởi các tiêu điểm và các đỉnh trên trục bé của (E) bằng 24.

Giải:



+) Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$ và $a^2=b^2+c^2$

Ta có tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow a=\frac{5}{3}c$

+) Gọi $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ là các tiêu điểm và $B_1(0;-b), B_2(0;b)$ là các đỉnh trên trục bé.

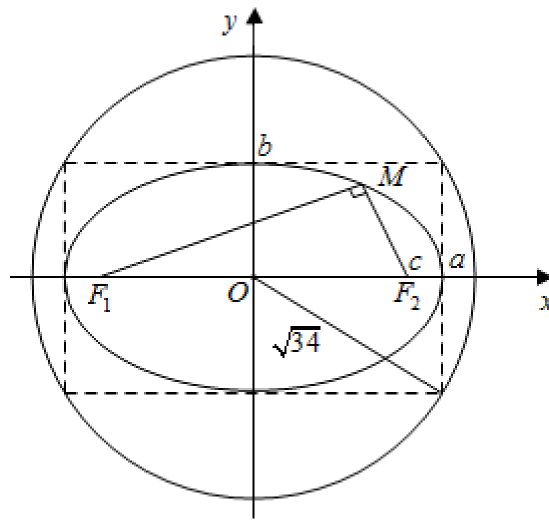
Suy ra $F_1B_2F_2B_1$ là hình thoi , khi đó: $S_{F_1B_2F_2B_1} = \frac{1}{2}F_1F_2.B_1B_2 = \frac{1}{2}.2c.2b = 2bc = 24 \Leftrightarrow bc = 12 \Leftrightarrow b = \frac{12}{c}$

Khi đó $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}c\right)^2 = \left(\frac{12}{c}\right)^2 + c^2 \Leftrightarrow 25c^4 = 1296 + 9c^4 \Leftrightarrow c^4 = 81 \Leftrightarrow c = 3$ (do $c > 0$)

Suy ra $a = 5; b = 4$. Vậy phương trình chính tắc của elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Bài 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có tâm sai $e = \frac{4}{5}$, đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của elip có phương trình $x^2 + y^2 = 34$. Viết phương trình chính tắc của elip và tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho M nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông và M có hoành độ dương.

***Giải*:**



+) Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$

Ta có tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow c = \frac{4}{5}a$

Vì đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở có bán kính $R = \sqrt{34} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{34} \Leftrightarrow b^2 = 34 - a^2$

Khi đó $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = 34 - a^2 + \left(\frac{4}{5}a\right)^2 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5; b = 3; c = 4$.

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Bài 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$ có hai tiêu điểm F_1 và F_2 với F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1^2 + 2MF_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

***Giải*:**

+) Ta có $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, suy ra $\begin{cases} a = 3; \quad b = 2 \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

+) Gọi $M(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\begin{cases}MF_1=a+ex_0;\quad MF_2=a-ex_0\\ \dfrac{x_0^2}{9}+\dfrac{y_0^2}{4}=1\quad(*)\end{cases}$ với $-3\le x_0\le 3$

Khi đó $P=MF_1^2+2MF_2^2=\left(a+ex_0\right)^2+2\left(a-ex_0\right)^2=3a^2-2aex_0+3e^2x_0^2=\dfrac{5}{3}\left(x_0^2-\dfrac{6}{\sqrt5}x_0+\dfrac{81}{5}\right)$

+) Xét hàm $f(x_0)=x_0^2-\dfrac{6}{\sqrt5}x_0+\dfrac{81}{5}$ với $x_0\in[-3;3]$

Ta có $f'(x_0)=2x_0-\dfrac{6}{\sqrt5}$; $f'(x_0)=0\Leftrightarrow x_0=\dfrac{3}{\sqrt5}\in[-3;3]$

x_0	-3		$\frac{3}{\sqrt5}$		3
$f'(x_0)$		$-$	0	$+$	
$f(x_0)$	↘		$\frac{108}{5}$		↗

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{x_0\in[-3;3]}f(x_0)=\dfrac{108}{5}\Rightarrow\min P=\dfrac{5}{3}f(x_0)=36$ khi $x_0=\dfrac{3}{\sqrt5}$

+) Thay $x_0=\dfrac{3}{\sqrt5}$ vào (*) ta được: $y_0^2=\dfrac{16}{5}\Leftrightarrow y_0=\pm\dfrac{4}{\sqrt5}$

Vậy $MF_1^2+2MF_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $M\left(\dfrac{3}{\sqrt5};\dfrac{4}{\sqrt5}\right)$ hoặc $M\left(\dfrac{3}{\sqrt5};-\dfrac{4}{\sqrt5}\right)$.

Bài 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và điểm $I(1;2)$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua I, cắt (E) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho I là trung điểm của AB.

Giải:

+) $I(1;2)$ thuộc miền trong của (E) nên d luôn cắt (E) tại A,B

Gọi phương trình đường thẳng d có dạng: $\begin{cases}x=1+mt\\ y=2+nt\end{cases}$ với $t\in\mathbb{R},m^2+n^2\ne0$.

+) Gọi $A(1+mt_1;2+nt_1),B(1+mt_2;2+nt_2)$. Trong đó t_1,t_2 là nghiệm của phương trình:

$$\frac{(1+mt)^2}{16}+\frac{(2+nt)^2}{9}=1\Leftrightarrow\left(9m^2+16n^2\right)t^2+2(9m+32n)t-71=0$$

Theo hệ thức Vi – et ta có: $t_1+t_2=-\dfrac{2(9m+32n)}{9m^2+16n^2}$

+) I là trung điểm của AB khi $\begin{cases}x_A+x_B=2x_I\\ y_A+y_B=2y_I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2+m(t_1+t_2)=2\\ 4+n(t_1+t_2)=4\end{cases}$

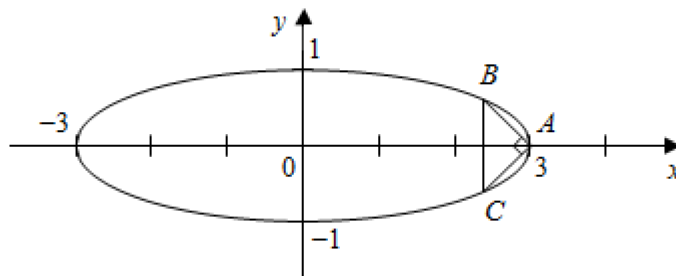
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(t_1+t_2)=0 \\ n(t_1+t_2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{2m(9m+32n)}{9m^2+16n^2}=0 \\ -\dfrac{2n(9m+32n)}{9m^2+16n^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow 9m+32n=0 \quad (\text{do } m^2+n^2\neq 0)$$

Với $9m+32n=0 \Leftrightarrow 9m=-32n$, ta chọn $\begin{cases} m=32 \\ n=-9 \end{cases}$

Suy ra phương trình $d:\begin{cases} x=1+32t \\ y=2-9t \end{cases}$ hay $9x+32y-73=0$

Bài 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;0)$ và elip $(E):\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$. Tìm tọa độ các điểm B,C thuộc (E) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Giải:



+) Ta có B,C thuộc (E) và tam giác ABC vuông cân tại A. Mặt khác $A(3;0)\in Ox$ và elip (E) nhận Ox,Oy làm các trục đối xứng nên B,C sẽ đối xứng nhau qua trục Ox. Do đó gọi $\begin{cases} B(m;n) \\ C(m;-n) \end{cases}$ với $n\neq 0$

+) Suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(m-3;n) \\ \overrightarrow{AC}=(m-3;-n) \end{cases}$, khi đó $\begin{cases} B,C\in(E) \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m^2}{9}+n^2=1 \\ (m-3)^2-n^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m^2}{9}+n^2=1 \\ n^2=(m-3)^2 \end{cases}$

Suy ra $\dfrac{m^2}{9}+(m-3)^2=1 \Leftrightarrow 5m^2-27m+36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\dfrac{12}{5} \end{array}\right.$

+) Với $m=3 \Rightarrow n=0$ (loại)

+) Với $m=\dfrac{12}{5} \Rightarrow n=\pm\dfrac{3}{5}$, suy ra $\begin{cases} B\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{3}{5}\right) \\ C\left(\dfrac{12}{5};-\dfrac{3}{5}\right) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} B\left(\dfrac{12}{5};-\dfrac{3}{5}\right) \\ C\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{3}{5}\right) \end{cases}$

Bài 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;0)$ và elip $(E):\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$. Tìm tọa độ các điểm B,C thuộc (E) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A, biết điểm B có tung độ dương.

Giải:

+) Do $A(0;3)\in(E)$; $B,C\in(E)$ và ΔABC cân tại A nên B,C đối xứng nhau qua trục hoành Ox

Khi đó gọi $B(x_0;y_0)\Rightarrow C(x_0;-y_0)$ và $\dfrac{x_0^2}{9}+y_0^2=1$ với $x_0<3$

Gọi H là trung điểm của $BC\Rightarrow H(x_0;0)\Rightarrow\begin{cases}BC=2|y_0|=\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x_0^2}\\ AH=|3-x_0|=3-x_0\end{cases}$

+) Ta giác ABC vuông cân tại A nên:

$$AH=\frac{1}{2}BC\Leftrightarrow 3-x_0=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\sqrt{9-x_0^2}\Leftrightarrow x_0=\frac{12}{5}\text{ (do }x_0<3)\Rightarrow y_0^2=\frac{9}{25}\Rightarrow y_0=\pm\frac{3}{5}$$

+) Do B có tung độ dường nên ta có: $B\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{3}{5}\right)$ và $C\left(\dfrac{12}{5};-\dfrac{3}{5}\right)$.

Bài 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Tìm điểm M có hoành độ dượng thuộc (E) sao cho $\widehat{F_1MF_2}=90^0$, trong đó F_1,F_2 là các tiêu điểm.

Giải:

+) $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1\Rightarrow\begin{cases}a=5\\ b=3\end{cases}\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=4$.

+) Gọi $M(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{25}+\dfrac{y_0^2}{9}=1\\ MF_1=5+\dfrac{4}{5}x_0;\quad MF_2=5-\dfrac{4}{5}x_0\end{cases}$

Vì tam giác F_1MF_2 vuông tại M nên :

$$MF_1^2+MF_2^2=F_1F_2^2\Leftrightarrow\left(5+\frac{4}{5}x_0\right)^2+\left(5-\frac{4}{5}x_0\right)^2=64\Leftrightarrow x_0^2=\frac{175}{16}\Rightarrow y_0^2=\frac{81}{16}$$

+) Do M có hoành độ dường nên ta được: $M\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{4};\dfrac{9}{4}\right)$ hoặc $M\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{4};-\dfrac{9}{4}\right)$.

Bài 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E) có tâm sai $e=\dfrac{4}{5}$, đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của elip có phương trình $x^2+y^2=34$. Viết phương trình chính tắc của elip và tìm tọa độ điểm M thuộc elip (E) sao cho M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông và M có hoành độ dương.

Giải:

+) Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>1$

+) Vì đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở có bán kính $R=\sqrt{34}$ nên $a^2+b^2=34$

Khi đó ta có hệ : $\begin{cases}e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{4}{5}\\ a^2+b^2=34\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25(a^2-b)^2=16a^2\\ a^2+b^2=34\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\ b=3\end{cases}\Rightarrow c=4$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

+) Gọi $M(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{25}+\dfrac{y_0^2}{9}=1\\ MF_1=5+\dfrac{4}{5}x_0;\quad MF_2=5-\dfrac{4}{5}x_0\end{cases}$

Vì tam giác F_1MF_2 vuông tại M nên :

$$MF_1^2+MF_2^2=F_1F_2^2\Leftrightarrow\left(5+\frac{4}{5}x_0\right)^2+\left(5-\frac{4}{5}x_0\right)^2=64\Leftrightarrow x_0^2=\frac{175}{16}\Rightarrow y_0^2=\frac{81}{16}$$

+) Do M có hoành độ dường nên ta được: $M\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{4};\dfrac{9}{4}\right)$ hoặc $M\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{4};-\dfrac{9}{4}\right)$.

Bài 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:3x+y-4=0$ và elip $(E):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d và cắt (E) tại hai điểm A,B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 3.

Giải:

+) Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d:3x+y-4=0$ nên có dạng: $x-3y+c=0$

Khi đó phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (E) là:

$$4x^2+(x+c)^2=36\Leftrightarrow 5x^2+2cx+c^2-36=0\quad(*)$$

Ta có d cắt (E) tại hai điểm A,B khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt hay

$$\Delta'=180-4c^2>0\Leftrightarrow -3\sqrt{5}<c<3\sqrt{5}\quad(2*)$$

+) Đường thẳng Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt $A\left(x_1;\dfrac{x_1+c}{3}\right),B\left(x_2;\dfrac{x_2+c}{3}\right)$

với x_1,x_2 là nghiệm của (*) và $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{2c}{5}\\ x_1x_2=\dfrac{c^2-36}{5}\end{cases}$. Khi đó:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+\left(\frac{x_2-x_1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{10}}{15}\sqrt{720-16c^2}$$

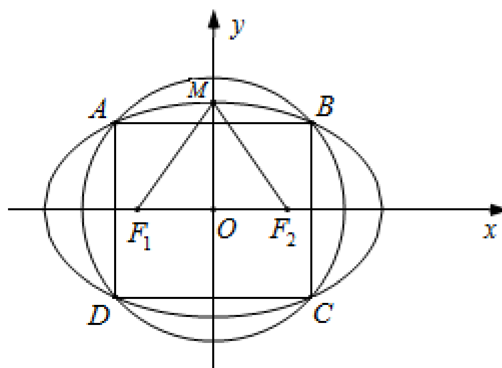
$d(O,\Delta)=\dfrac{|c|}{\sqrt{10}}$, suy ra: $S_{OAB}=3\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}AB.d(O,\Delta)=3\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{10}}{15}\sqrt{720-16c^2}.\dfrac{|c|}{\sqrt{10}}=3$

$$\Leftrightarrow 16c^4-720c^2+8100=0\Leftrightarrow c=\pm\frac{3\sqrt{10}}{2}\quad\text{(thỏa mãn (2*))}$$

Vậy phương trình đường thẳng Δ cần lập là $2x-6y+3\sqrt{10}=0$ hoặc $2x-6y-3\sqrt{10}=0$.

Bài 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho biết elip (E) có chu vi hình chữ nhật cơ sở bằng $16\left(2+\sqrt{3}\right)$, đồng thời một đỉnh của (E) tạo với hai tiêu điểm một tam giác đều. Viết phương trình đường tròn (T) có tâm là gốc tọa độ và cắt (E) tại bốn điểm là bốn đỉnh của một hình vuông.

Giải:



+) Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$

Ta có chu vi hình chữ nhật cơ sở là $4(a+b)=16\left(2+\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow a=4\left(2+\sqrt{3}\right)-b$ (1)

+) Gọi $M(0;b)$ là đỉnh của (E) mà MF_1F_2 là tam giác đều, khi đó:

$$MO=\frac{\sqrt{3}F_1F_2}{2}\Leftrightarrow b=\sqrt{3}c\Leftrightarrow c=\frac{b}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

Mặt khác ta có : $a^2=b^2+c^2$ (3)

Thay (1), (2) vào (3) ta được: $\left[4\left(2+\sqrt{3}\right)-b\right]^2=b^2+\frac{b^2}{3}\Rightarrow b=4\sqrt{3}\Rightarrow a=8$

Vậy phương trình $(E):\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$

+) Phương trình đường tròn (T) có dạng: $x^2+y^2=R^2$

Đường tròn (T) cắt (E) tại bốn điểm phân biệt A,B,C,D.

Do (T) và (E) đều nhận Ox,Oy làm các trục đối xứng nên $ABCD$ là hình chữ nhật

Gọi $A(x;y)\Rightarrow\begin{cases}B(-x;y)\\C(-x;-y)\end{cases}$

Khi đó hình chữ nhật $ABCD$ thành hình vuông thì $AB=BC\Leftrightarrow|2x|=|2y|\Leftrightarrow x^2=y^2$

Do $A\in(T)\cap(E)$ nên x,y thỏa mãn: $\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1\\x^2=y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=y^2=\frac{R^2}{2}\\\frac{R^2}{2.64}+\frac{R^2}{2.48}=1\end{cases}\Rightarrow R^2=\frac{384}{7}$

Vậy phương trình đường tròn (T) cần lập là $x^2+y^2=\frac{384}{7}$.

Bài 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ và điểm $M(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M cắt (E) tại hai điểm A,B sao cho trung điểm của đoạn thẳng AB nằm trên đường thẳng $\Delta: y=2x$.

Giải:

+) Do $\frac{2^2}{25}+\frac{1^2}{9}<1$ nên M nằm trong (E), suy ra mọi đường thẳng qua M đều cắt (E) tại hai điểm phân biệt

+) Nếu d đi qua $M(1;2)$ và song song với Ox hay d có phương trình $x=1$
thì trung điểm của AB là điểm $I(1;0)$ không thuộc đường thẳng $y=2x$ (loại)

Do đó gọi phương trình đường thẳng d đi qua $M(2;1)$ có hệ số góc k có dạng: $y=k(x-2)+1$

Khi đó tọa độ A,B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=k(x-2)+1 \\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=kx-2k+1 \\ (25k^2+9)x^2-50k(2k-1)x+25(2k-1)^2-225=0 \quad (*) \end{cases}$$

+) Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$. Ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{50k(2k-1)}{25k^2+9} \\ y_1+y_2=\frac{2(9-18k)}{25k^2+9} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{25k(2k-1)}{25k^2+9};\frac{9-18k}{25k^2+9}\right)$$: là trung điểm của AB

+) Khi đó $I\in\Delta \Leftrightarrow \frac{9-18k}{25k^2+9}=\frac{50k(2k-1)}{25k^2+9} \Leftrightarrow (2k-1)(50k+9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=\frac{1}{2} \\ k=-\frac{9}{50} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d: y=\frac{1}{2}x \\ d: y=-\frac{9}{50}x+\frac{34}{25} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đường thẳng d cần lập là $y=\frac{1}{2}x$ hoặc $y=-\frac{9}{50}x+\frac{34}{25}$.

Bài 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ ngoại tiếp tam giác đều ABC. Tính diện tích tam giác ABC, biết (E) nhận $A(0;2)$ làm đỉnh và trục tung làm trục đối xứng.

Giải:

+) Do ABC là tam giác đều và $A(0;2)$ nên B,C đối xứng nhau qua trục tung
nên gọi $B(x_0;y_0)\Rightarrow C(-x_0;y_0)$ với $x_0>0$

+) Độ dài tam giác đều ABC là $a=2x_0$ và chiều cao $h=2-y_0$

Khi đó $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 2-y_0=\sqrt{3}x_0 \Leftrightarrow y_0=2-\sqrt{3}x_0 \Rightarrow B\left(x_0;2-\sqrt{3}x_0\right)$

+) Ta có $B\in(E)\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{16}+\frac{\left(2-\sqrt{3}x_0\right)^2}{4}=1\Leftrightarrow x_0=\pm\frac{16\sqrt{3}}{13}\xrightarrow{x_0>0} x_0=\frac{16\sqrt{3}}{13}$

$$\Rightarrow B\left(\frac{16\sqrt{3}}{13};-\frac{22}{13}\right)\Rightarrow \begin{cases} a=2x_0=\frac{32\sqrt{3}}{13} \\ h=2-y_0=\frac{48}{13} \end{cases} \Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}ah=\frac{768\sqrt{3}}{169}$$

Vậy $S_{ABC}=\frac{768\sqrt{3}}{169}$.

Bài 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$. Tìm các điểm M thuộc (E) sao cho $\widehat{F_1MF_2}=120^0$, trong đó F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E).

Giải:

+) Elip (E) có $\begin{cases} a=10 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=5\sqrt{3} \Rightarrow F_1F_2=2c=10\sqrt{3}$.

+) Gọi $M(x_0;y_0)\in(E) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_0^2}{100}+\dfrac{y_0^2}{25}=1 \quad (*) \\ MF_1=a+\dfrac{c}{a}x_0=10+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_0; \quad MF_2=a-\dfrac{c}{a}x_0=10-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_0 \end{cases}$

Khi đó ta có: $F_1F_2^2=MF_1^2+MF_2^2-2MF_1.MF_2.\cos\widehat{F_1MF_2}$

$$\Leftrightarrow \left(10\sqrt{3}\right)^2=\left(10+\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)^2+\left(10-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)^2-2\left(10+\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)\left(10-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right).\cos120^0$$

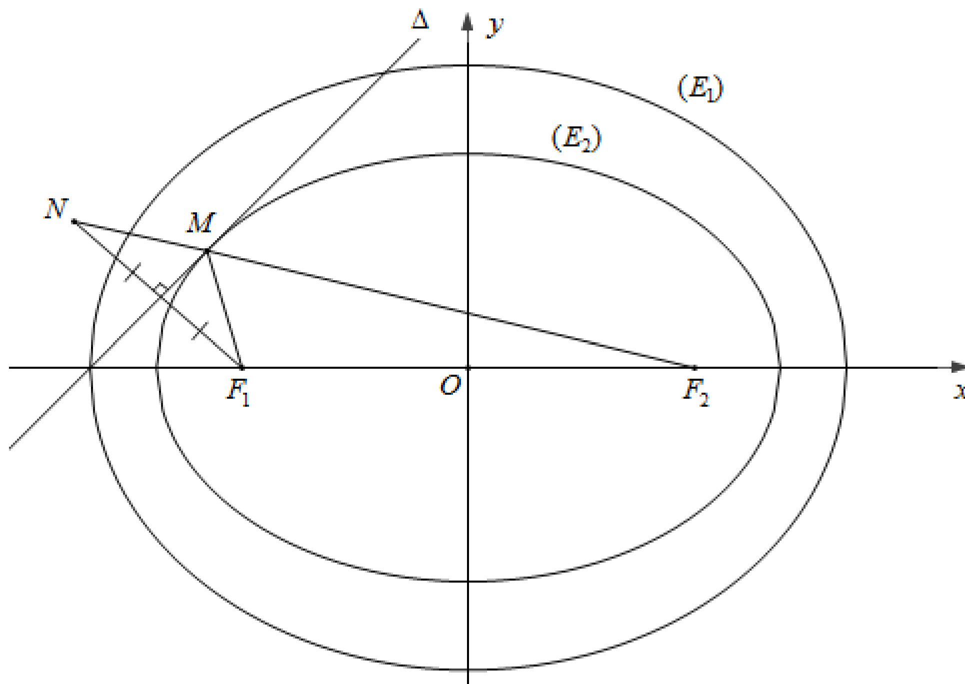
$$\Leftrightarrow 300=200+\frac{3}{2}x_0^2+100-\frac{3}{4}x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2=0 \Leftrightarrow x_0=0$$

+) Thay $x_0=0$ vào (*) ta được: $y_0^2=25 \Leftrightarrow y_0=\pm5$

Vậy $M(0;5)$ hoặc $M(0;-5)$.

Bài 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x-y+5=0$ và hai elip có phương trình $(E_1): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ và $(E_2): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$). Biết hai elip này có cùng tiêu điểm và (E_2) đi qua điểm M thuộc đường thẳng Δ. Tìm tọa độ điểm M sao cho elip (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất.

Giải:



+) Elip (E_1) có hai tiêu điểm $F_1(-3;0), F_2(3;0)$. Dễ thấy F_1, F_2 nằm cùng phía với Δ

Vì $M \in (E_2)$ và (E_2) nhận F_1, F_2 là hai tiêu điểm nên ta có: $MF_1 + MF_2 = 2a$

Khi đó elip (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất khi và chỉ khi $MF_1 + MF_2$ nhỏ nhất

+) Gọi N đối xứng với $F_1(-3;0)$ qua $\Delta \Rightarrow N(-5;2)$. Khi đó ta có phương trình NF_2 là: $x+4y-3=0$

+) Ta có $MF_1 + MF_2 = MN + MF_2 \ge NF_2 = \sqrt{68}$. Suy ra $MF_1 + MF_2$ nhỏ nhất khi $\{M\} = NF_2 \cap \Delta$

Vậy tọa độ điểm M là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x+4y-3=0 \\ x-y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{17}{5} \\ y = \dfrac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{17}{5}; \dfrac{8}{5}\right)$

Vậy $M\left(-\dfrac{17}{5}; \dfrac{8}{5}\right)$.

Bài 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ và hai điểm $A(3;-2), B(-3;2)$. Tìm trên (E) điểm C có tọa độ dương sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Giải:

+) Phương trình đường thẳng AB là: $2x+3y=0$

+) Gọi $C(x_0; y_0)$ với $x_0, y_0 > 0$. Do $C \in (E) \Rightarrow \dfrac{x_0^2}{9} + \dfrac{y_0^2}{4} = 1$

Khi đó $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB.d(C, AB) = \dfrac{1}{2}.\sqrt{52}.\dfrac{|2x_0 + 3y_0|}{\sqrt{13}} = 2x_0 + 3y_0$ (1)

Mặt khác theo Bất đẳng thức Bu – nha ta có:

$$2 = (1^2 + 1^2)\left(\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4}\right) \ge \left(\frac{x_0}{3} + \frac{y_0}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{x_0}{3} + \frac{y_0}{2} \le \sqrt{2} \Leftrightarrow 2x_0 + 3y_0 \le 6\sqrt{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ABC} \le 6\sqrt{2}$

+) Dấu "=" xảy ra khi : $\begin{cases} \dfrac{x_0^2}{9} + \dfrac{y_0^2}{4} = 1 \\ \dfrac{x_0}{3} = \dfrac{y_0}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ y_0 = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$. Vậy $C\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$.

Bài 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Lập phương trình chính tắc của elip (E), biết điểm $M\left(1; \sqrt{3}\right)$ nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông và hình chữ nhật cơ sở của (E) nội tiếp đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 20$.

Giải:

+) Gọi phương trình chính tắc của elip (E) là $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$

Do $\widehat{F_1MF_2} = 90^0$ nên $OM = \dfrac{1}{2} F_1F_2 \Leftrightarrow OM = c = 2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 4$ (1)

+) Hình chữ nhật cơ sở của (E) nội tiếp đường tròn : $x^2 + y^2 = 20 \Rightarrow a^2 + b^2 = 20$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^2=12;b^2=8$. Vậy elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$

Bài 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm F_1,F_2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 bằng $\frac{4}{3}$.

Giải:

+) Ta có $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \\ c=\sqrt{a^2-b^2}=4 \end{cases} \Rightarrow p=\frac{MF_1+MF_2+F_1F_2}{2}=9$

Khi đó $S_{MF_1F_2}=pr=\frac{1}{2}d(M,Ox).F_1F_2 \Rightarrow d(M,Ox)=\frac{2pr}{F_1F_2}=\frac{2.9.\frac{4}{3}}{8}=3=|y_M| \Rightarrow y_M=\pm 3$

+) Mặt khác $M\in(E)\Rightarrow x_M=0$. Vậy $M(0;3)$ hoặc $M(0;-3)$.

Bài 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M\left(2\sqrt{3};2\right)$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua điểm M, sao cho M nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông.

Giải:

+) Gọi phương trình chính tắc của elip (E) là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$

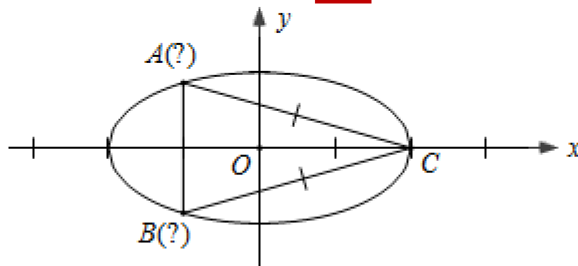
Do $M\in(E)\Rightarrow \frac{12}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$ (1)

+) Mặt khác $\widehat{F_1MF_2}=90^0$ nên $OM=\frac{1}{2}F_1F_2=c\Rightarrow c=4\Rightarrow a^2-b^2=16$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^2=24;b^2=8$. Vậy elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{8}=1$.

Bài 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $C(2;0)$ và elip $(E):\frac{x^2}{4}+y^2=1$. Tìm các điểm A,B trên (E) sao cho $CA=CB$ và tam giác CAB có diện tích lớn nhất.

Giải:



+) Theo giả thiết ta có C là đỉnh nằm trên trục lớn của elip (E).

Do $CA=CB$, suy ra A,B đối xứng nhau qua trục hoành

Gọi $A(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1\\ B(x_0;-y_0)\end{cases}$ với $x_0\in(-2;2)$

Khi đó $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}d(C,AB).AB=\dfrac{1}{2}|2-x_0|.|2y_0|=|(2-x_0)y_0|$

$$\Rightarrow S_{ABC}^2=(2-x_0)^2.y_0^2=(2-x_0)^2.\left(1-\frac{x_0^2}{4}\right)=\frac{(2-x_0)^3(2+x_0)}{4}\quad(1)$$

Mặt khác áp dụng BĐT Cauchy ta có:

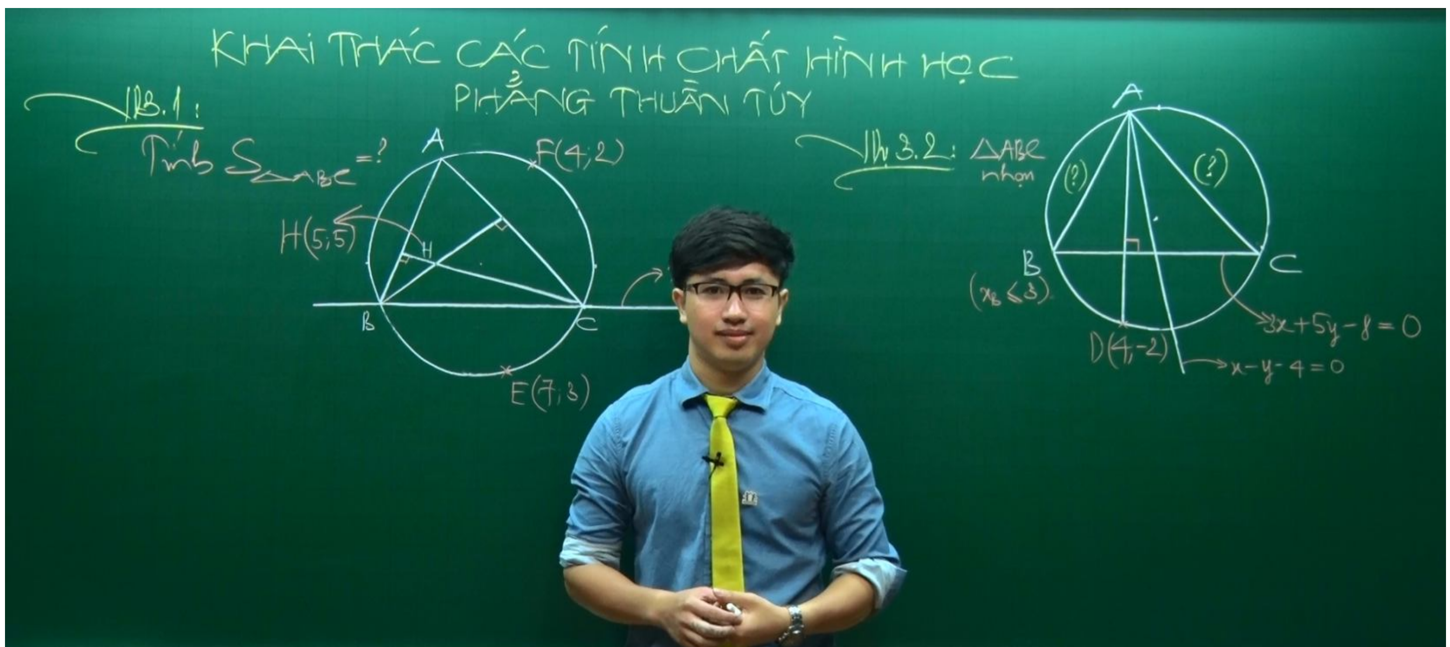
$$4=\frac{2-x_0}{3}+\frac{2-x_0}{3}+\frac{2-x_0}{3}+2+x_0\ge 4.\sqrt[4]{\frac{(2-x_0)^3.(2+x_0)}{27}}\Rightarrow(2-x_0)^3.(2+x_0)\le 27\quad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $S_{ABC}^2\le\dfrac{27}{4}\Leftrightarrow S_{ABC}\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{2-x_0}{3}=2+x_0=1\Leftrightarrow x_0=-1\Rightarrow y_0=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A\left(-1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),B\left(-1;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ A\left(-1;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),B\left(-1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{array}\right.$

Vậy $A\left(-1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),B\left(-1;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ hoặc $A\left(-1;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),B\left(-1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

CẢM ƠN CÁC BẠN ĐÃ QUAN TÂM !



GV: Nguyễn Thanh Tùng